

# Insegnare e apprendere la Matematica

Prof. Brunetto Piochi



ANASTASIS

CORSI E FORMAZIONE  
per la scuola e l'apprendimento

SAPERE E SAPER FARE



# Alcune domande....

- Perché si insegna la Matematica ?
- Perché dobbiamo occuparci degli alunni con maggiori difficoltà ?
- Perché dobbiamo cambiare il modo di insegnare ?
- Perché costruire un «curricolo» invece del «programma» ?
- Quali sono i punti irrinunciabili ?

# Perché si insegna la matematica?

## Le ragioni teoricamente possibili sono molte

- ... insegna a ragionare meglio
- ... è utile nella vita e nel lavoro
- ... fa parte delle nostre radici culturali
- ... è il linguaggio della scienza
- ... insegna a risolvere problemi
- ...

# Molti studenti incontrano difficoltà nell'apprendimento della matematica.

## Perché lavorare sulle Difficoltà in Matematica?

- ❑ La matematica è essenziale per la comprensione e la gestione di molte situazioni di vita e per sviluppare alcune capacità cruciali; dunque è un DIRITTO del cittadino
- ❑ La riflessione sulle difficoltà (anche quelle “al limite”) e sui modi per rispondervi ha ricadute significative sull'insegnamento per tutti gli studenti.

# Perché cambiare ?

- ❑ In un tempo molto breve, abbiamo vissuto il passaggio da una società relativamente stabile a una società caratterizzata da molteplici cambiamenti e discontinuità.
- ❑ Ogni persona si trova nella ricorrente necessità di riorganizzare e reinventare i propri saperi, le proprie competenze e persino il proprio stesso lavoro. Le tecniche e le competenze diventano obsolete nel volgere di pochi anni.
- ❑ Oggi l'apprendimento scolastico è solo una delle tante esperienze di formazione che i bambini e gli adolescenti vivono. Lo studente si trova a interagire con culture diverse.

# Perché cambiare ?

- ❑ Il fare scuola oggi significa curare e consolidare le competenze e i saperi di base, che sono irrinunciabili [... e ...] formare saldamente ogni persona sul piano cognitivo e culturale, per affrontare l'incertezza e la mutevolezza degli scenari sociali e professionali,
- ❑ Alla scuola spetta far sì che gli studenti acquisiscano gli strumenti di pensiero necessari per apprendere a selezionare le informazioni e favorire l'autonomia di pensiero degli studenti
- ❑ La scuola è chiamata a realizzare percorsi formativi sempre più rispondenti alle inclinazioni personali degli studenti

*riflessioni dalle «Indicazioni Nazionali per il I ciclo di Istruzione»*

# Imparare con gli altri...

**non significa**

imparare le stesse cose negli stessi momenti,

**ma**

percorrere ognuno (*in presenza o in assenza di deficit*) una strada  
individuale di apprendimento,

all'interno di un curriculum generale integrato.



# Matematica: Perché? Cosa?

- ❑ Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il “pensare” e il “fare” e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall’uomo, eventi quotidiani.
- ❑ In particolare, la matematica dà strumenti per la **descrizione scientifica del mondo** e per **affrontare problemi utili nella vita quotidiana**; contribuisce a sviluppare la capacità di **comunicare e discutere**, di **argomentare in modo corretto**, di **comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri**.

*(Indicazioni Nazionali)*



# Literacy Matematica

- E' la capacità degli studenti di formulare, impiegare e interpretare la matematica in una varietà di contesti. Include il ragionamento matematico e l'utilizzo di concetti, procedure, fatti e strumenti matematici per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Consente alle persone di riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo e di formulare giudizi e decisioni fondate come cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi.

*(OCSE-PISA 2015)*

# Matematica: Perché? Cosa?

- “La competenza matematica non può essere ridotta alla conoscenza della terminologia matematica, ai fatti e ai procedimenti, né tantomeno alle abilità necessarie per svolgere certe operazioni e applicare certi metodi, sebbene presupponga tutto ciò”

(OCSE, 2004)

- “L’educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica”

(UMI-CIIM 2003)

# Matematica: Perché? Cosa?

- “La competenza matematica, che non si esaurisce nel sapere disciplinare e neppure riguarda soltanto gli ambiti operativi di riferimento, consiste nell’abilità di individuare e applicare le procedure che consentono di esprimere e affrontare situazioni problematiche attraverso linguaggi formalizzati.”

*(Assi culturali: asse matematico)*

# Quale Matematica ?

- ❑ un oggetto sociale, da “condividere” con altri al pari di ogni altro sapere
- ❑ uno strumento che serva a collegare / modellizzare / interpretare / comunicare
- ❑ un mezzo essenziale all'autonomia personale e all'esercizio della cittadinanza

## ... dunque una matematica

- ❑ dove la sintassi è secondaria rispetto alla semantica
- ❑ dove le formule sono mezzi e non fini
- ❑ dove anche la mediazione narrativa è centrale per l'apprendimento
- ❑ non parcellizzata, dove i diversi registri comunicativi si illuminano e chiariscono a vicenda

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.

# Matematica: Come insegnarla?

- ❑ La matematica va insegnata e appresa in una comunità, confrontando i diversi punti di vista, sostenendo e cambiando le proprie idee, in una condivisione “sociale” di questo come di ogni altro sapere
- ❑ Ci si dovrà occupare quanto più possibile del mondo “reale
- ❑ La proposta didattica deve concentrarsi sul metodo e sulla componente metacognitiva dell’apprendimento, oltre che su quella cognitiva
- ❑ La tecnologia potrà in questa direzione diventare una naturale “protesi” per favorire l’apprendimento

# Rispetto alla prassi tradizionale

- Va rivalutato il ruolo della memoria a lungo termine (più significativa per la comprensione) rispetto alla memoria a breve termine
- Va incoraggiata la partecipazione attiva degli studenti
- Diventa fondamentale lo sforzo per acquisire un metodo di lavoro ben impostato
- Va incoraggiata la capacità degli allievi di reperire autonomamente le informazioni necessarie e di formulare in maniera corretta ciò che hanno appreso
- E' opportuno stimolare la capacità di autovalutazione



# Occorre spostare il “focus” dell’insegnamento *(alcuni esempi...)*

Da:	A:
Abilità di calcolo scritto	Calcolo mentale      Calcolo automatico
Studio di figure standard	Riconoscimento di figure dinamiche e non standard e studio delle loro proprietà
Definizioni e formule	Linguaggio      Ragionamento
Memorizzazione e riproduzione di procedure standard	Metacognizione Elaborazione di ipotesi e loro verifica Generalizzazione
“Problemi”	Modellizzazione Problem posing e Problem solving

# Un esempio

# Usare la calcolatrice



[www.scuolavalore.indire.it/nuove\\_risorse/la-calcolatrice/](http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/la-calcolatrice/)

## Il gioco “batto/vedo”

- ❑ Questo schema può essere utilizzato come supporto per la comprensione di ciò che fa la persona e di ciò che fa la macchina. Esso mette in gioco la consapevolezza della modalità di scrittura del numero da parte della calcolatrice e le differenze con la scrittura del numero con carta e penna e può essere rappresentato nel seguente modo:

BATTO	VEDO
	0.
2	2.
5	25.
+	25.
8	8.
=	33.

# Smaschera l'errore

- L'attività si svolge in due tempi diversi: il primo è gestito mediante una attività del gruppo classe, senza l'uso di calcolatrici; nel secondo tempo, gli alunni vengono divisi a gruppi e a ogni gruppo viene assegnata una scheda da riempire aiutandosi con la calcolatrice.

Nella prima parte vengono presentati “calcoli errati” come i seguenti e chiediamo ai ragazzi di indicare come ci si può accorgere dell'errore:

# Smaschera l'errore

$$325 \times 761 = 246.750$$

fattori dispari, risultato pari

$$338 \times 47 = 16.224$$

poiché il prodotto delle unità  $7 \times 8 = 56$  non si può avere la cifra 4 come cifra delle unità del prodotto

$$435 - 57 = 492$$

totale maggiore del minuendo

$$45,2 \times 3,2 = 1446,4$$

ordine di grandezza errato

$$(-45) \times (-23) = -1035$$

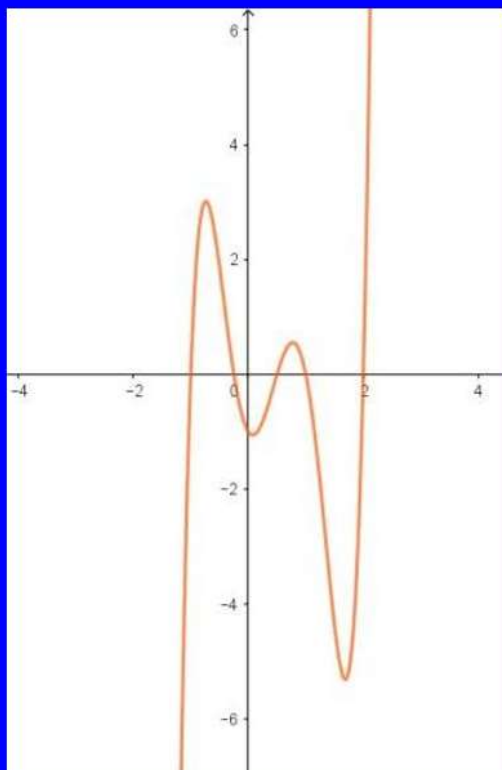
segno sbagliato

$$(-45) \times (-23) = -68$$

ordine di grandezza e segno errati

# Grafici di funzione Sec. II grado

Cosa ci dice il grafico della funzione seguente ?

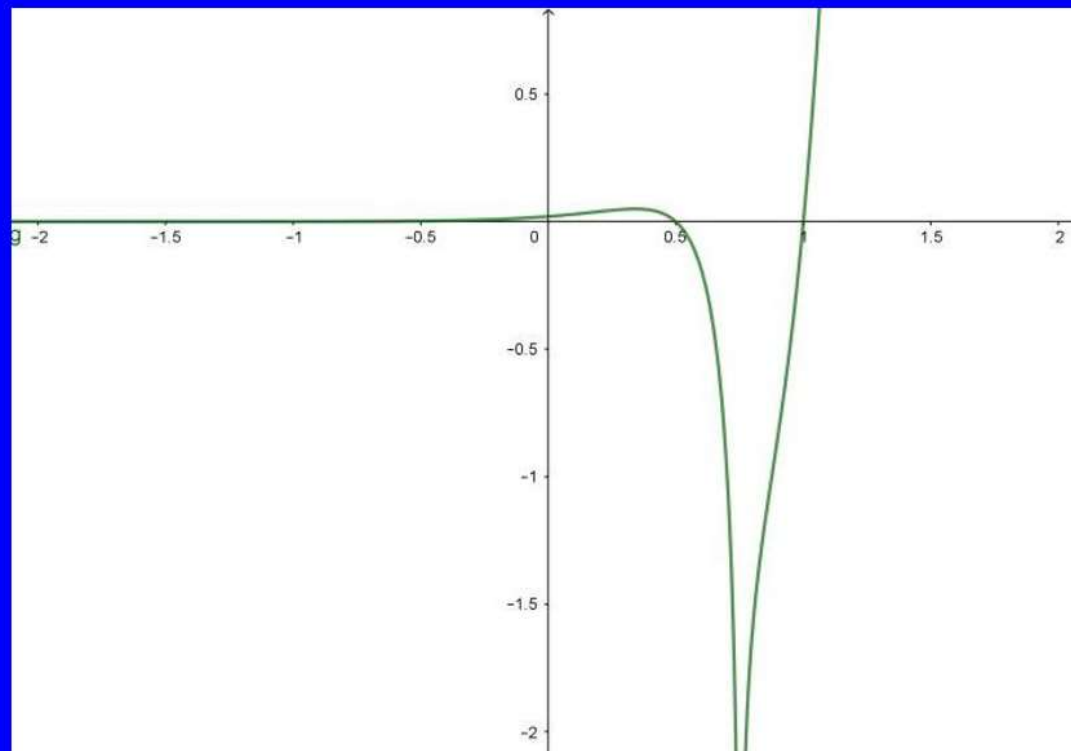


$$h(x) = 4x^5 - 9x^4 - \frac{5}{2}x^3 + 10x^2 - \frac{3}{2}x - 1$$

$$\left[ h(x) = (x - 2) \left(2x + \frac{1}{2}\right) (2x - 1) (x^2 - 1) \right]$$

# Grafici di funzione Sec. II grado

Considerate la funzione seguente :  $g(x) = e^{5x-4} \ln(|4x-3|)$



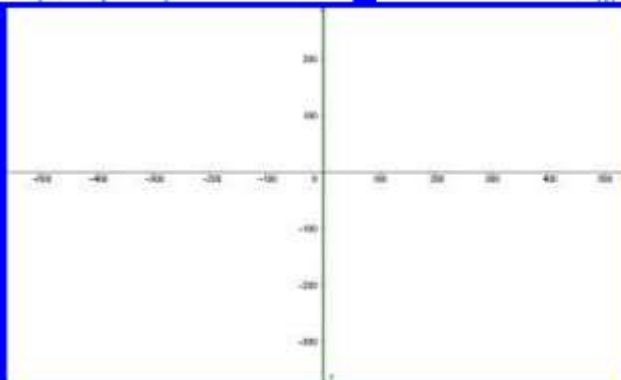
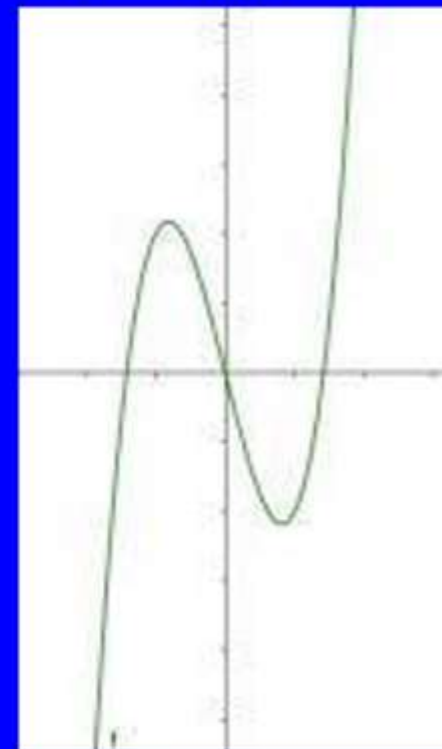
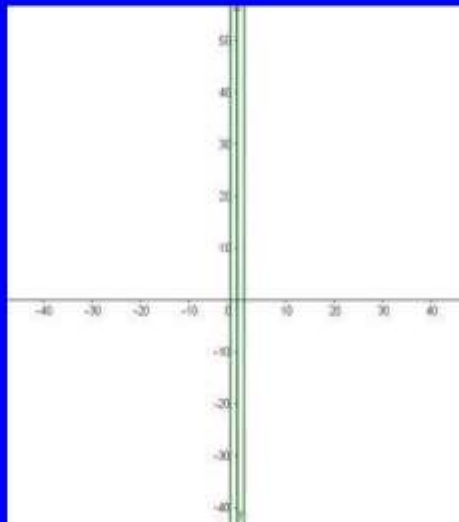
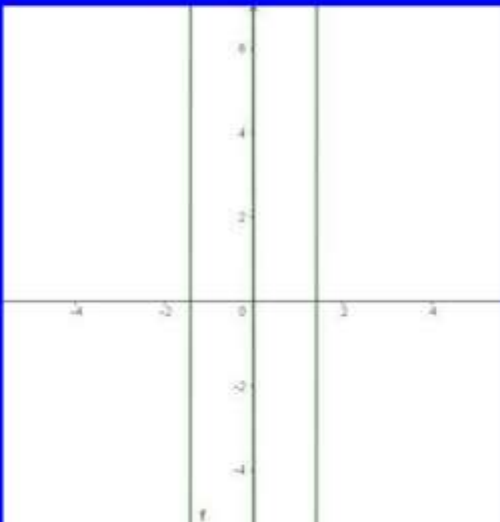
Che informazioni possiamo ricavare dalla espressione analitica ? E dal suo grafico ?



# Ma l'Analisi serve sempre.....

Che grafico ha la funzione ?

$$f(x) = 400x^3 - 800x$$



$$\text{Max} = (-0.82, 108.86)$$

$$\text{Min} = (0.82, -108.86)$$

# Lattine

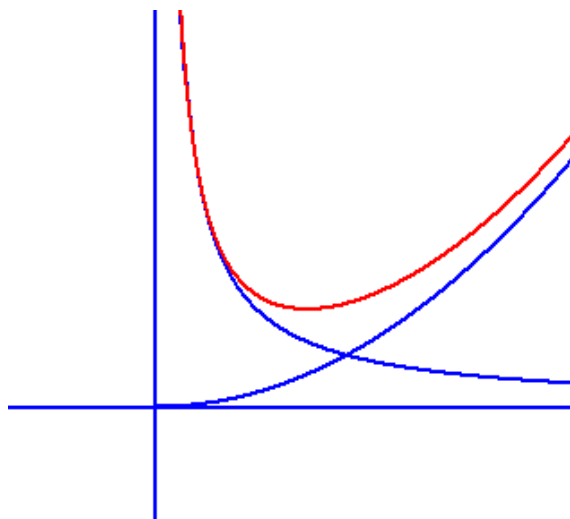
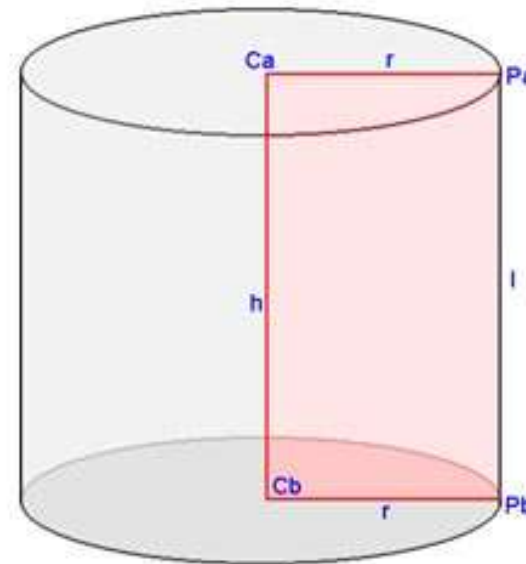


- ❑ Quale è la forma ideale di una lattina?
- ❑ Ovvero, a parità di volume, quali sono le dimensioni che permettono di risparmiare materiale?

Si indichi con  $x$  il raggio di base del cilindro, di volume noto  $V$ , e sia  $h$  la sua altezza. L'area della superficie totale sarà pari a:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xh = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + 2 \frac{V}{x}$$

Funzioni da minimizzare:  $z = ax^2 + \frac{b}{x}$



Usare il grafico per farsi un'idea: una semplice verifica con valori "vicini" mostra che il minimo non corrisponde all'intersezione... ma ESISTE UN MINIMO

Dunque c'è un valore minimo per  $z$

Supponiamo  $z$  sia minimo per  $x = t$

$$z \leq ax^2 + \frac{b}{x}$$

$$ax^3 - zx + b \geq 0$$

$$ax^3 - zx + b = 0 \text{ per } x = t$$

Applichiamo il Teorema di Ruffini !

$$ax^3 - zx + b = (x - t)(ax^2 + atx - z + at^2)$$



Per la seconda disequazione in alto bisogna che anche il secondo pezzo sia divisibile per  $(x-t)$  e sostituendo ottengo:

$$3at^2 = z = at^2 + \frac{b}{t}$$

$$2at^3 = b$$

$$t = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}} = \sqrt[3]{\frac{2V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$h(t) = \frac{V}{\pi t^2} = 2 \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2t \quad !!!$$

# L'approccio vincente.... **APPROCCIO LABORATORIALE !**

- ❑ In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale **il laboratorio**, inteso sia come luogo fisico sia come **momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive**

# Il laboratorio di matematica

- ❑ Il laboratorio di matematica **NON E'** necessariamente un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici.
- ❑ Il laboratorio, coinvolge persone (*studenti e insegnanti*), strutture (*aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi*), idee (*progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni, GIOCO*)

# Gli strumenti del laboratorio di matematica

Gli strumenti possono essere di tipo tradizionale oppure tecnologici

- Il “cervello” , gli “altri” ,la “parola” (discussioni in classe, lavori di gruppo, relazioni)
- I materiali “poveri”; le mani ;...
- I giornali, le ricerche su Internet; la storia della matematica
- I software: fogli elettronici, geometria o manipolazione simbolica
- Le calcolatrici grafico-simboliche
- Le macchine matematiche

# Un paio di esempi



# II «Metro-Bruco»

2<sup>^</sup> Primaria

<https://drive.google.com/file/d/0B8KoFnK-WaXiVHhsUkFmRTUtSHM>


Dopo la lettura di una storia che coinvolgeva un albero, un bruco e una farfalla che volava via «a 5 metri di distanza» si è posto il problema di quanti sono i 5 metri per il nostro bruco .

Ai bambini divisi a piccolo gruppi si è proposta una gara a chi «ideava il metro-bruco» più bello per aiutare la farfalla a ritrovare il suo albero. A gruppi dovevano:

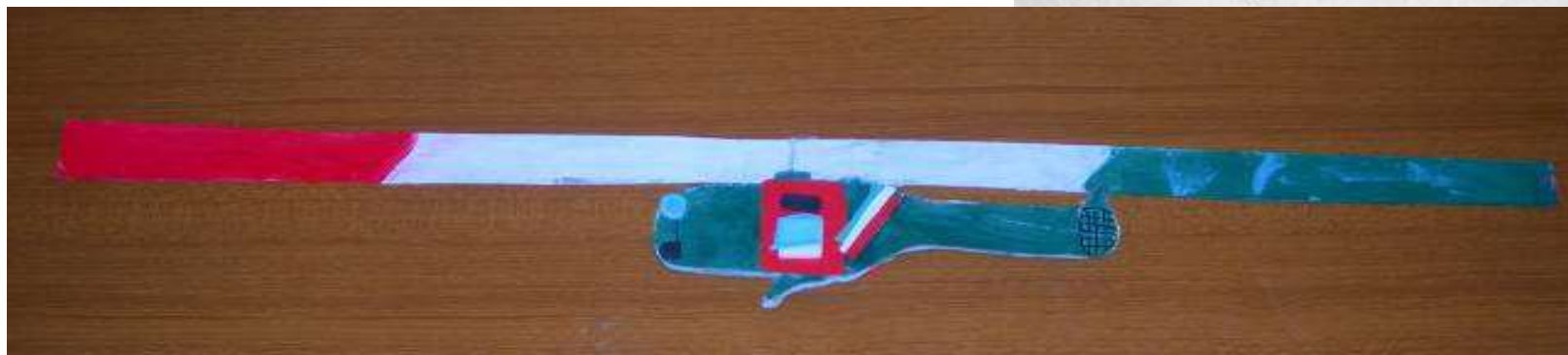
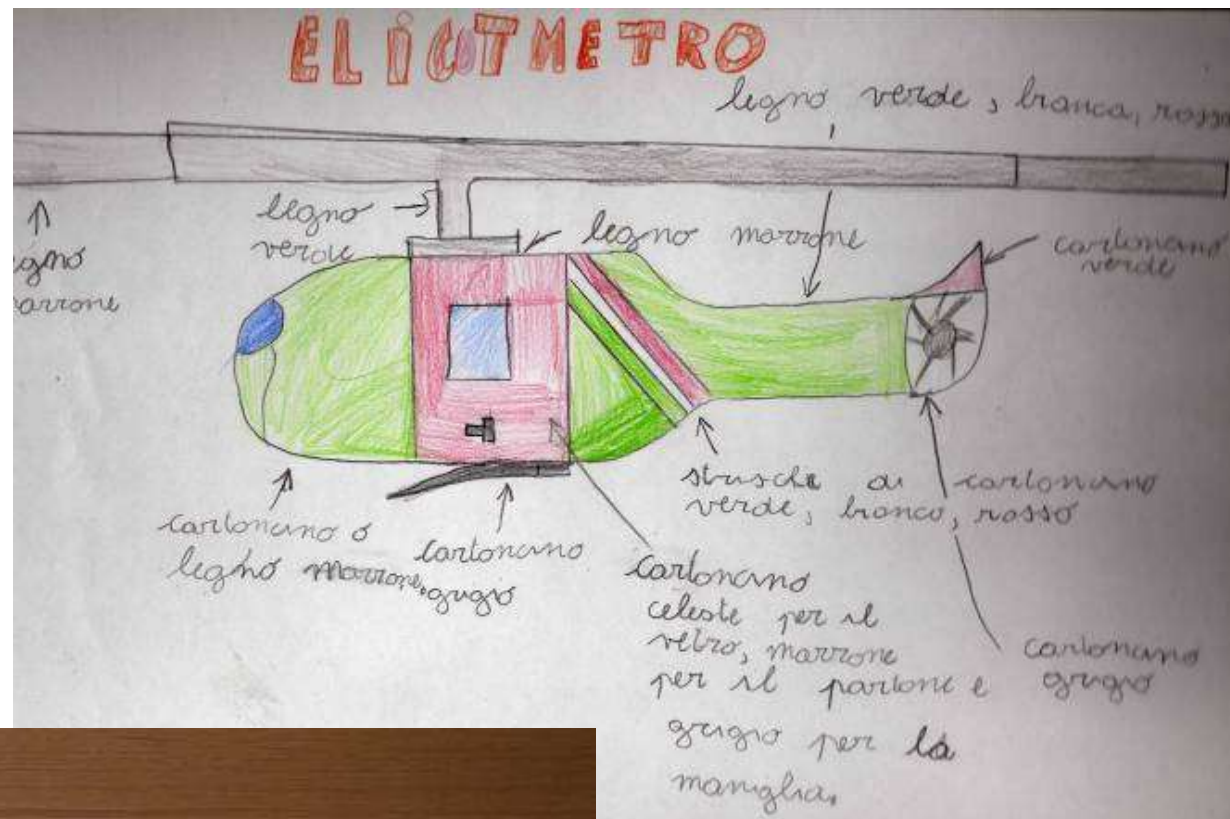
1. Fare un progetto dettagliato e spiegarlo a tutti
2. Utilizzare solo i materiali presenti in classe

# Rigolino

- fogli di giornale + scheletro <sup>dai piedi alla gola</sup> di Eleonora
- 2 rivanicadenti per le antenne
- stoffa a righe verdi per il corpo
- filo giallo per i capelli
- un po' di spago o nastro
- 2 spillini per le antenne verde chiaro
- per la bocca un pezzo di carta crepe verde
- cotone verde per le zampe
- per il naso un pezzo di carta crepe verde

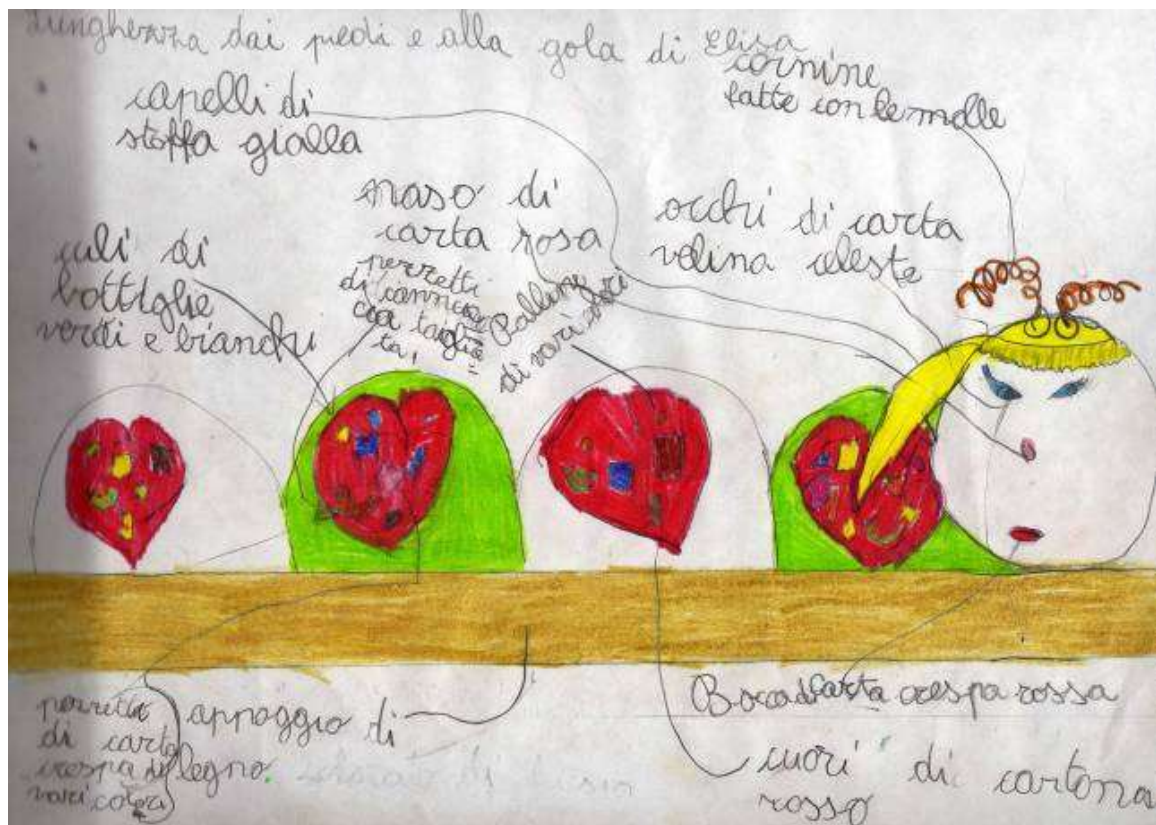



# Elicotmetro





# Il Bruco innamorato



# Ruote Dentate

2<sup>da</sup> classe sec. I grado

1<sup>ma</sup> classe scuola sec. secondo grado



[www.grimed.net/wp-content/uploads/2018/03/Ruote-dentate.pdf](http://www.grimed.net/wp-content/uploads/2018/03/Ruote-dentate.pdf)

# «Giocando» con le ruote dentate...

- Due ruote dentate vicine ruotano una in senso orario, l'altra antiorario.
- In una serie lineare di ruote dentate, tutte le ruote di posto pari avranno lo stesso verso di rotazione, quelle di posto dispari contrario.
- Una catena chiusa formata da un numero dispari di ruote non si muove. Il movimento è possibile solo se la catena è formata da un numero pari di ruote.





# Le proporzioni

n° DENTI RUOTA A	n° DENTI RUOTA B	n° GIRI RUOTA A	n° GIRI RUOTA B
10	6	3	5
6	14	7	3
10	14	7	5
30	60	2	1
40	20	1	2
26	60	30	13
60	14	7	30
40	60	3	2



n° GIRI A	n° GIRI B	DENTI A	DENTI B
5	3	DENTI A	DENTI B
3	5	GIRI B	GIRI A
1	2	DENTI A · GIRI A = DENTI B · GIRI B	

$$n(\text{Denti A}) / n(\text{Denti B}) = n(\text{Giri B}) / n(\text{Giri A})$$

$$n(\text{Denti A}) / n(\text{Giri B}) = n(\text{Denti B}) / n(\text{Giri A})$$

$$n(\text{Denti A}) \cdot n(\text{Giri A}) = n(\text{Denti B}) \cdot n(\text{Giri B})$$



# Descriviamo un oggetto reale...

## Il bianchetto

Filippo, Roberto

L'ingranaggio è composto da due ruote dentate, una più piccola e una più grande, posizionate sullo stesso piano. A ogni ruota è collegato un rullo, a quello della ruota più piccola si avvolge il nastro già usato, mentre a quello della ruota più grande è avvolto il nastro con l'inchiostro correttore da usare. Girando, la ruota più grande fa svolgere il nastro ancora da usare e di conseguenza girerà in senso opposto la ruota piccola, riavvolgendo il nastro usato al suo rullo.



## La centrifuga per insalata

Andrea, Alessio

L'oggetto si presenta come una scatola cilindrica; una volta aperta la centrifuga si vede un "cestino" dove ci va messa l'insalata.

Sopra al coperchio della centrifuga si può notare una manovella collegata con l'interno. Sotto al coperchio il tappo del cestello è attaccato fisso tramite un sistema di incastro.

Si nota che:

- il coperchio e' composto da una ruota più piccola di quella della manovella
- la ruota piccola (quella del tappo del cestino) si incastra perfettamente con quella grande (quella del tappo della centrifuga).
- il cestello va più veloce della manovella perché la manovella fa da centrifuga.
- il coperchio della centrifuga con la manovella e il coperchio del cestello fanno girare il cestello che fa scolare l'insalata.



# Funzioni Esponenziali

2<sup>a</sup> biennio scuola sec. II grado

[www.scuolavalore.indire.it/nuove\\_risorse/una-crescita-esponenziale-sotto-controllo/](http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/una-crescita-esponenziale-sotto-controllo/)

L'attività, prendendo spunto dalla crescita di Alice nel libro "Alice nel paese delle meraviglie", guida gli studenti alla determinazione della legge  $y=2^n$  e a una prima riflessione sulle caratteristiche di una successione esponenziale.

Si prende poi sempre spunto da "Alice nel paese delle meraviglie" per avviare una prima analisi di una successione esponenziale con base compresa tra 0 ed 1 e quindi decrescente che sarà in seguito approfondita con un problema sull'evoluzione del tasso alcolemico nel sangue in seguito a un'assunzione di una bevanda alcolica.



La legge attuale prevede che chi prende la patente abbia per tre anni l'obbligo di guidare sempre con tasso alcolemico di 0,0 g/l. Dopo i primi tre anni il tasso alcolemico deve essere inferiore allo 0,5 g/l e le sanzioni previste per chi uguaglia o supera questo valore variano all'aumentare del suo valore. Il valore massimo del tasso alcolemico si raggiunge un'ora dopo aver finito di bere.

A. Se all'uscita di un pub il tasso alcolemico di un ragazzo è dello 0,6 g/l e la sua costituzione è tale da ridurre il tasso del 30% ogni ora, quanto sarà il valore del tasso dopo un'ora? E dopo 2 ore?

B. Prepara un foglio di calcolo; in esso predisponi:

- una cella in cui inserire il valore del tasso alcolemico;
- una colonna in cui inserire il numero  $n$  di ore;
- una seconda colonna in cui inserire i valori del tasso corrispondente.

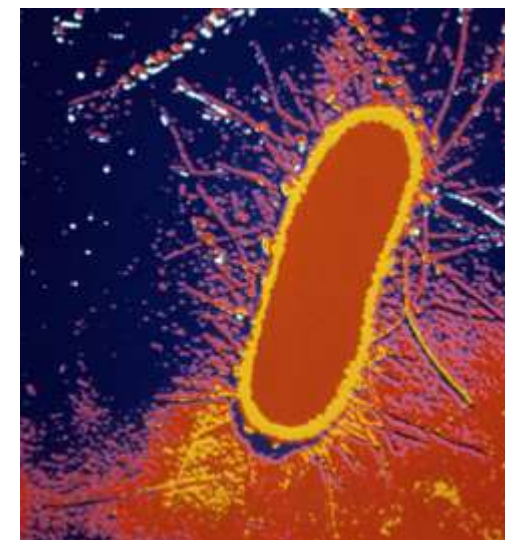
Inserito un tasso alcolemico a tua scelta e generati i numeri  $n$  delle ore, calcola i valori del tasso corrispondente.

Trasforma i valori di  $n$  e del tasso così determinati in coordinate di punti da riportare sul piano cartesiano e traccia il grafico della funzione.

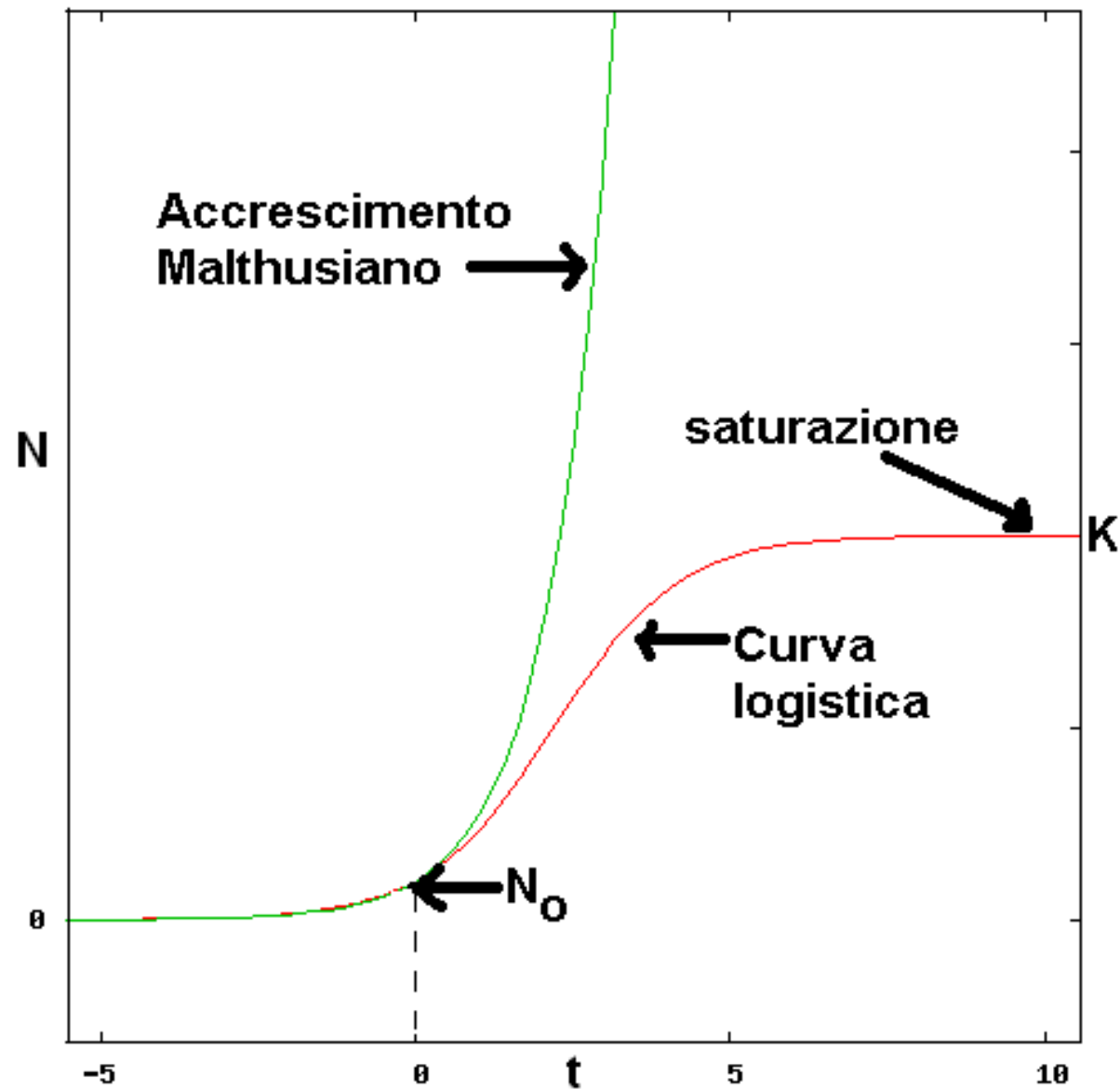
Partiamo dal problema:

I batteri si riproducono per scissione, ovvero ogni batterio si "*divide*" in 2 nuovi batteri. Supponendo di osservare il procedimento di scissione a partire da 1 batterio, scrivi una legge che permetta di calcolare il numero  $B$  di batteri al variare del numero  $n$  di scissioni.

Si chiede agli studenti di studiare la successione delle differenze prime e di notare che anch'essa varia esponenzialmente.



# Crescita di popolazioni e modelli matematici



# Il Laboratorio di Matematica: Alla Ricerca di un equilibrio...

**Costruzione negoziata della conoscenza** (*discussione*)

**Trasmissione della conoscenza** (*lezione*)

**Pensiero divergente** (*creatività delle soluzioni*)

**Omologazione** (*trasmissione di quanto appreso*)

**Cooperazione** (*lavoro di squadra*)

**Competizione** (*voglia di arrivare primi*)



## Alcuni siti con spunti di attività

<http://www.scuolavalore.indire.it> (*M@t.abel e PQM Matematica*)

<http://www311.regione.toscana.it/lr04/web/lss/prodotti>

<https://sites.google.com/site/ricercazionematpt/home>

<http://storico.cidi.it/curricolo/matematica.php>

*Dalla pagina seguente si possono scaricare i materiali prodotti dalla  
Unione Matematica Italiana per il curricolo di matematica*

<http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo/>